MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL NAȚIONAL „PEDAGOGIA MATEMATICII”

7 martie 2026

ETAPA JUDEȚEANĂ/SECTOARELOR MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

CLASA a X-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- ***Filiera vocaţională, profilul pedagogic, toate specializările***
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I (autor Cristina Mihaela Iacob) (20 de puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale următoarele ecuații:

a) $\sqrt{\log_{2026}^{4} x - 2\cdot\log_{2026}^{2} x + 1} = 0$.

b) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$.

a)	Condiția de existență a logaritmului $x>0$. Notăm $\log_{2026}^{2} x = t, t\geq 0$	2p
	Obținem $\sqrt{t^2-2t+1}=0 \Rightarrow \sqrt{(t-1)^2}=0$	2p
	$t=1$, deci $\log_{2026}^{2} x = 1 \Rightarrow \log_{2026} x = \pm 1$	2p
	$x = 2026^{-1} = \frac{1}{2026}$ care nu convine	2p
	$x = 2026$ care convine	2p
b)	$x+11\geq 0, x+\sqrt{x+11}\geq 0, x-\sqrt{x+11}\geq 0$	3p
	Ridicând la pătrat obținem $x+\sqrt{x^2-x-11}=8$	3p
	Deci $x^2-x-11=64-16x+x^2$	2p
	$x=5$ care convine	2p

SUBIECTUL II (autor Cristina Mihaela Iacob) (20 de puncte)

a) Calculați valoarea expresiei $E(a,b)=\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} : \frac{a+\sqrt{ab}+b}{a-b} + 2\sqrt{ab}$ pentru $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

și $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

b) Arătați că $L\in\mathbb{N}$, unde

$$L=\frac{1}{\log_2 1+\log_2 2+\ldots+\log_2 2026}+\frac{1}{\log_3 1+\log_3 2+\ldots+\log_3 2026}+\ldots.$$

$$+\frac{1}{\log_{2026} 1+\log_{2026} 2+\ldots+\log_{2026} 2026}$$

a)	$a,b\ge 0;\ \ E(a,b)=\dfrac{\sqrt{a}^3-\sqrt{b}^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{a-b}+2\sqrt{ab}=$	2p
	$=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b}+2\sqrt{ab}=$	2p
	$=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}=$	2p
	$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}=a+b$	2p
	$E\left(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{3}$	2p
b)	$L=\dfrac{1}{\log_2(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}+\dfrac{1}{\log_3(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{2026}(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}=$	4p
	$=\log_{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}2+\log_{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}3+\ldots+\log_{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}2026=$	4p
	$=\log_{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2026)}(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2026)=1$, deci $L\in\mathbb{N}$	2p

SUBIECTUL III (autor Anamaria Șendroiu) **(25 de puncte)**

Se consideră funcția $f:(-8,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}$.

a) Dați un exemplu de număr real $a>-8$ astfel încât $f(a)\in\mathbb{Q}$. Arătați că există o infinitate de valori reale ale lui a, astfel încât $f(a)$ să fie număr rațional.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{x+2}{\sqrt{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}$.

c) Calculați pătratul sumei

$$S=\frac{1}{f(0^3)+f(1^3)}+\frac{1}{f(1^3)+f(2^3)}+\frac{1}{f(2^3)+f(3^3)}+\ldots+\frac{1}{f(15^3)+f(16^3)}.$$

a)	De exemplu, pentru $a=-1, f(-1)=1\in\mathbb{Q}$	5p
	Fie $\sqrt{2+\sqrt[3]{a}}=r$, $r\in\mathbb{Q}$, $r\ge 0$. Deci a poate fi orice număr real de forma $\left(r^2-2\right)^3$, cu $r\in\mathbb{Q}$, $r\ge 0$.	5p
b)	$\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=x+2$, cu condiția $2+\sqrt[3]{x}\ge 0$, $x+2\ge 0$	4p
	$\sqrt{8+x}=x+2$	2p
	$8+x=(x+2)^2$	1p
	$x^2+3x-4=0$	1p
	$x=-4$, care nu convine sau $x=1$, care convine	2p
c)	$S=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{18}}=$	2p
	$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{18}-\sqrt{17}=$	1p
	$=2\sqrt{2}$	1p
	$S^2=8$	1p

SUBIECTUL IV (autor Maria Elena Panaitopol) **(25 de puncte)**

Fie numerele reale a,b,c,u,v,w cu proprietatea $a^2+b^2+c^2=au+bv+cw=u^2+v^2+w^2$.

a) Calculați $(a-u)^2+(b-v)^2+(c-w)^2$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}=14$.

a)	$(a-u)^2+(b-v)^2+(c-w)^2=a^2-2au+u^2+b^2-2bv+v^2+c^2-2cw+w^2=$	**5p**
	$=\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(au+bv+cw)+\left(u^2+v^2+w^2\right)=0$	**5p**
b)	Observăm că, înlocuind $a=\sqrt{x+y}$, $b=\sqrt{8-x}$, $c=\sqrt{6-y}$, $u=3$, $v=2$, $w=1$, sunt verificate toate condițiile din ipoteza problemei	**5p**
	Atunci, conform a), $\left(\sqrt{x+y}-3\right)^2+\left(\sqrt{8-x}-2\right)^2+\left(\sqrt{6-y}-1\right)^2=0$	**5p**
	Obținem $x=4$ și $y=5$, care convin	**5p**