CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026
Clasa a IX–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

a) Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\sqrt{3}>m$. Arătați că: $3n^2-m^2\geq 2$.

b) Arătați că: $\sqrt{k^2+2}-k>\dfrac{1}{k+1}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

c) Dacă $m,n\in\mathbb{N}^*$ și $\sqrt{3}>\dfrac{m}{n}$, arătați că: $\sqrt{3}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{n(m+1)}$.

SOLUȚIE:

a) $m,n\in\mathbb{N}^*$, $n\sqrt{3}>m\Rightarrow 3n^2>m^2$ și $m,n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 3n^2-m^2>0$ și $m,n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 3n^2-m^2\in\mathbb{N}^*$ …………..**2p**

Dacă $3n^2-m^2=1\Rightarrow m^2=3n^2-1=M_3-1=M_3+2\Rightarrow$ contradicție deoarece numerele care dau restul 2 la împărțirea la 3 nu pot fi pătrate perfecte, prin urmare $3n^2-m^2\neq 1$ ……………………………………………………………………**4p**

$3n^2-m^2\neq 1, 3n^2-m^2\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 3n^2-m^2\geq 2$ ……………………………………………………………………**1p**

b) $\sqrt{k^2+2}-k>\dfrac{1}{k+1}\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{k^2+2}+k}>\dfrac{1}{k+1}\Leftrightarrow 2k+2>\sqrt{k^2+2}+k\Leftrightarrow k+2>\sqrt{k^2+2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2+4k+4>k^2+2\Leftrightarrow 4k+2>0$, adevărat $\forall k\in\mathbb{N}^*$ …………………………………………………… **5p**

c) $\sqrt{3}>\dfrac{m}{n}\Rightarrow n\sqrt{3}>m\overset{a)}{\Rightarrow}3n^2-m^2\geq 2\Rightarrow 3n^2\geq m^2+2\Rightarrow\sqrt{3}\geq\dfrac{\sqrt{m^2+2}}{n}\Rightarrow\sqrt{3}-\dfrac{m}{n}\geq\dfrac{\sqrt{m^2+2}-m}{n}\overset{b)}{>}\dfrac{1}{n(m+1)}$

Prin urmare, $\sqrt{3}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{n(m+1)}$ ……………………………………………………………………**8p**

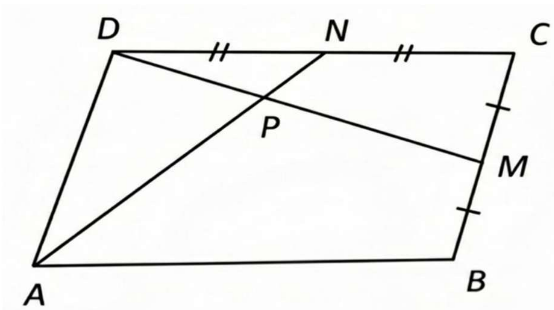
Subiectul 2. (*20 puncte*)

Fie $ABCD$ un patrulater în care $AB \| CD$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv DC, iar P este intersecția dreptelor AN și DM. Știind că $AP = 4PN$, se cere:

a) Arătați că $5 \cdot \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \frac{2DC}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

c) Determinați valoarea raportului $\frac{DP}{PM}$.



SOLUȚIE:

a) $\frac{AP}{PN} = \frac{4}{1} \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{DN}$ 3p

$\overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci $\overrightarrow{DC} = \frac{DC}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ 2p

$5\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + 4 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + 2 \cdot \frac{DC}{AB}\overrightarrow{AB}$ 2p

b) $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{5} \cdot \frac{DC}{AB}\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{DC}{AB}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{DC}{AB} + 1\right)\overrightarrow{AB}$ 3p

$\overrightarrow{DP}$ și $\overrightarrow{DM}$ sunt coliniari, deci $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{DC}{AB}}{\frac{1}{2}\left(\frac{DC}{AB} + 1\right)} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = 1$ 3p

$AB \| CD$, $AB = CD \Rightarrow ABCD$ paralelogram..........1p

c) Din b) $ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ 3p

$\overrightarrow{DP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DM} \Rightarrow \frac{DP}{DM} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{DP}{PM} = \frac{2}{3}$ 2p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Să se arate că: $\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{2x+y+2z}+\frac{z}{2x+2y+z}\ge\frac{3}{5}, \forall x,y,z>0$.

SOLUȚIE:

Notăm $x+2y+2z=a$, $2x+y+2z=b$, $2x+2y+z=c$, $\forall a,b,c>0$. Prin adunarea celor trei relații, obținem

$5x+5y+5z=a+b+c\Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{5}$ **5p**

$x=\frac{2b+2c-3a}{5}$, $y=\frac{2a+2c-3b}{5}$, $z=\frac{2a+2b-3c}{5}$ **6p**

Primul membru al inegalității devine:

$\frac{2b+2c-3a}{5a}+\frac{2a+2c-3b}{5b}+\frac{2a+2b-3c}{5c}=\frac{2}{5}\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\right]-3\cdot\frac{3}{5}$ **4p**

Folosind inegalitatea fundamentală $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\ge 2, \forall m,n>0$, se obține:

$\frac{2}{5}\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\right]-3\cdot\frac{3}{5}\ge\frac{2}{5}\cdot 6-\frac{9}{5}=\frac{3}{5}$, de unde concluzia... **5p**

(Cazul de egalitate are loc pentru $a=b=c\Leftrightarrow x=y=z$)

Metodă alternativă

$\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{2x+y+2z}+\frac{z}{2x+2y+z}=\frac{x^2}{x^2+2xy+2xz}+\frac{y^2}{2xy+y^2+2yz}+\frac{z^2}{2xz+2yz+z^2}\ge$

$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz}$ **10p**

Se arată prin calcul echivalența:

$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz}\ge\frac{3}{5}\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\ge 0\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$,

inegalitate adevărată, $\forall x,y,z>0$, de unde concluzia.. **10p**

(Cazul de egalitate are loc pentru $x=y=z$)

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Pe o hartă care are scara 1:10000000, localitățile sunt reprezentate prin puncte. Patru orașe, reprezentate pe hartă prin punctele A, B, C și D, sunt așezate astfel încât $ABCD$ este paralelogram, iar următoarele distanțe dintre orașe, măsurate în linie dreaptă pe hartă sunt: $AB = 4$ cm, $BD = 3$ cm, $BC = 2$ cm. Localitatea *Geometria* se află în punctul G, care este centrul de greutate al triunghiului determinat de punctele A, B și D, iar localitatea *Iași* se află în punctul I, care este centrul cercului înscris în triunghiul determinat de punctele B, C și D. Localitatea *Matematica*, reprezentată de punctul M, se află între localitățile B și C astfel încât punctele B, M și C să fie coliniare și $BM = 2MC$.

a) Un biciclist curajos, pleacă din localitatea marcată cu punctul A spre localitatea reprezentată de punctul D cu viteza de 20 km/oră. După 7 ore, pleacă tot din localitatea reprezentată de punctul A, în aceeași direcție, un șofer cu viteza de 80 km/oră. Calculați distanța reală dintre orașele reprezentate de punctele A și D și determinați la ce distanță față de localitatea de destinație se întâlnesc cei doi, știind că biciclistul a făcut pauză de masă de o oră până la momentul întâlnirii.

b) Arătați că punctele G, I și M sunt coliniare.

SOLUȚIE:

a) scară hartă $= \dfrac{dist.hartă}{dist.reală}$ **1p**

$\dfrac{1}{10000000} = \dfrac{2}{AD_{real}} \Rightarrow AD_{real} = 20000000\text{ cm} \Rightarrow AD_{real} = 200\text{ km}$....................................**3p**

Notând cu t, timpul în ore necesar șoferului de la pornire și până la întâlnire, rezultă că timpul în ore necesar biciclistului de la pornire și până la întâlnire este $t+7$ **2p**

distanța parcursă de cei doi este aceeași, de unde rezultă $80t = 20(t+6) \Rightarrow t = 2$, prin urmare distanța față de localitatea reprezentată de punctul A este 160 km, iar distanța față de localitatea de destinație de la punctul de întâlnire este 200 km-160 km=40 km....................................**4p**

b) G este centrul de greutate al triunghiului $\Delta ABD \Rightarrow \overrightarrow{r_G} = \dfrac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}}{3}$ **2p**

I este centrul cercului înscris în triunghiul ΔBCD de laturi $BC = 2$, $BD = 3$ și $CD = AB = 4$.

$\Rightarrow \overrightarrow{r_I} = \dfrac{b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}+d\overrightarrow{r_D}}{b+c+d} = \dfrac{4\overrightarrow{r_B}+3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}}{4+3+2} = \dfrac{4\overrightarrow{r_B}+3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}}{9}$ **4p**

$M \in (BC)$ și $BM = 2MC \Rightarrow \dfrac{BM}{MC} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{r_M} = \dfrac{\overrightarrow{r_B}+2\overrightarrow{r_C}}{3}$ **2p**

$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}$ **2p**

$\overrightarrow{r_G} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}-\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}\right) = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}\right)$ **2p**

$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{r_G}-\overrightarrow{r_M} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}\right)-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B}+2\overrightarrow{r_C}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B}-3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}\right)$ **3p**

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{r_I}-\overrightarrow{r_M} = \dfrac{1}{9}\left(4\overrightarrow{r_B}+3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}\right)-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B}+2\overrightarrow{r_C}\right) = \dfrac{1}{9}\left(4\overrightarrow{r_B}+3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}-3\overrightarrow{r_B}-6\overrightarrow{r_C}\right) = \dfrac{1}{9}\left(\overrightarrow{r_B}-3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}\right)$ **3p**

$\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MG}$ și $\overrightarrow{MI}$ sunt vectori coliniari $\Rightarrow$ punctele G, I și M sunt coliniare....................................**2p**

<u>Notă</u>:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.