CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026
Clasa a IX–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)
Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, având rădăcinile x_1 *și* x_2.

a) Arătați că dacă numerele reale nenule *a,b* și *c* sunt în progresie geometrică, în această ordine, atunci ecuația nu are rădăcini reale.
b) Determinați numerele reale a, b, c, unde $a > 0$, pentru care a, x_1, b, x_2, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
c) Dacă $b = a + c$ și $0 < c < 2a$ arătați că $|x_1 - x_2| < 1$.

SOLUȚIE:

a) a, b, c în progresie geometrică $\Longrightarrow b^2 = ac$..........2p
$\triangle = -3b^2$..........2p
$\triangle < 0 \Longrightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$..........2p

b) a, x_1, b, x_2, c în progresie aritmetică$\Longrightarrow a + c = x_1 + x_2 = 2b$..........1p
$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Longrightarrow b(2a + 1) = 0$..........1p
Cum $a > 0$, convine doar $b = 0 \Longrightarrow c = -a$..........1p
a, x_1, b, x_2, c în progresie aritmetică $\Longrightarrow x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{b+c}{2} = \frac{c}{2}$..........1p
$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Longrightarrow a(a^2 - 4) = 0$..........2p
$a = 2, c = -2$, care convin..........2p

c) $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$..........2p
$(x_1 - x_2)^2 = \left(1 - \frac{c}{a}\right)^2$..........2p
$|x_1 - x_2| = \left|1 - \frac{c}{a}\right| < 1$..........2p

Subiectul 2. (*20 puncte*)
Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $f(x + a) \leq x \leq f(x) + a, (\forall)x \in \mathbb{R}$ și *a* un parametru real fixat.

a) Arătați că $f(x) = x - a$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați numerele naturale nenule *n* pentru care $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \geq \frac{n^2+n-6a}{2}$.
c) Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = a \cdot f(x)$ formează cu axele de coordonate *Ox* și *Oy* un triunghi cu aria *A=4*.

SOLUȚIE:

a) $x \leq f(x) + a, (\forall)x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) \geq x - a$..........1p
$f(x + a) \leq x, (\forall)x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) \leq x - a$..........2p
$Obține\ f(x) = x - a, (\forall)x \in \mathbb{R}$..........1p

b) $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = \frac{n(n+1)}{2} - na$..........2p
Obține $na \leq 3a$..........1p
Dacă $a > 0 \Longrightarrow n \in \{1,2,3\}$..........2p
Dacă $a = 0 \Longrightarrow n \in \mathbb{N}^*$..........2p
Dacă $a < 0 \Longrightarrow n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$..........2p

c) $g(x) = ax - a^2, a \in \mathbb{R}^*$..........1p
$G_g \cap Ox = \{A(a, 0)\} \Longrightarrow OA = |a|$..........2p

$G_g \cap Oy = \{B(0, -a^2)\} \Longrightarrow OB = |-a^2| = |a|^2$..2p
$A = \frac{|a|^3}{2}$..1p
Obține $a \in \{-2,2\}$..1p

Subiectul 3. (*20 puncte*)
Coardele AB și CD ale unui cerc de centru O sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P iar M este piciorul perpendicularei din O pe AB.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OP}$.
b) Demonstrați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$.
c) Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$.

SOLUȚIE:

a) ΔOAB isoscel, OM înălțime $\Longrightarrow$ OM mediană $\Longrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$..2p
Dacă N este mijlocul lui CD $\Longrightarrow \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$..2p
OMPN dreptunghi$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OP}$..2p.
Obține $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OP}$..2p

b) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{PB}$..2p
$=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{PB}$..2p
$=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$ 2p

c) Obține $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PN}$..2p
OMPN dreptunghi$\Longrightarrow \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}$..2p
Obține $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$. 2p

Subiectul 4. (*30 puncte*)
Trei sate A, B și C sunt situate astfel încât, observate dintr-o dronă, se constată că pozițiile lor formează un triunghi dreptunghic în A, iar o gară G este situată între satele B și C (pe segmentul BC).
Măsurătorile făcute au condus la următoarele rezultate: $AB = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ km, , $\widehat{ABC} = \widehat{GAC} = 15^\circ$.

a) Demonstrați că $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
b) Determinați lungimile drumurilor de la gara G la fiecare dintre cele trei sate (se admite că drumurile dintre localități sunt segmentele GA, GB și GC).
c) Bogdan pleacă la ora 06:33 din satul B pentru a ajunge la gară, dar pentru că drumul BG este închis, trebuie să treacă prin satul A. Drumul din satul B în satul A îl parcurge cu un scuter cu viteza de 38 km/h, iar drumul din satul A la gară îl parcurge pe jos mergând cu viteza de 6 km/h. Știind că trenul în care trebuie să urce Bogdan pleacă la ora 07:10, stabiliți dacă Bogdan ajunge la timp la gară.(se vor utiliza valorile aproximative $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ și $\sqrt{6} \cong 2{,}4$).

SOLUȚIE:

a) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$..2p
$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ =$..3p
$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 3p

b) Demonstrează că AG este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei BC..2p
$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 3p
$\cos 15^\circ = \frac{GB}{AB} \Longrightarrow GB = 2(2+\sqrt{3})km$..3p
$\sin 15^\circ = \frac{AG}{AB} \Longrightarrow AG = 2$km..3p

$cos15^{\circ} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow BC = 8km\Longrightarrow GC = 2(2-\sqrt{3})$km......................3p

c) $BA = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})km\cong 7{,}6$km......................2p

$t_{BA} = 12$min......................2p

$AG = 2$km$\Longrightarrow t_{AG} = 20$min......................2p

$t_{B-A-G} = 32$min......................1p

Bogdan ajunge la gară la ora 07:05 deci ajunge la timp......................1p

<u>Notă</u>:

*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.