CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Considerăm mulțimea $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A^t \cdot A = I_2\}$ (A^t este transpusa matricei A).

a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup.

b) Există matricele $A, B \in G$, astfel încât $A + B \in G$?

c) Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) | \ {}^tA \cdot A = I_2\}$. Determinați numărul elemetelor mulțimii H și arătați că $(H,\cdot)$ este grup.

SOLUȚIE:

a)

- $A, B \in G \Longrightarrow A^t \cdot A = I_2, B^t \cdot B = I_2 \Longrightarrow (AB)^t \cdot (AB) = B^t \cdot A^t \cdot A \cdot B = B^t \cdot B = I_2$, deci „ $\cdot$ " este lege de compoziție pe G .... **2 puncte**
- Înmulțirea matricelor este asociativă .... **2 puncte**
- $I_2 \in G, I_2$ este element neutru .... **2 puncte**
- $\forall\ A \in G, A^{-1} = A^t \in G\ \ ((A^t)^t A^t = A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I_2)$ .... **2 puncte**

b) Aleg $A = I_2$ și caut $B \in G$ cu $I_2 + B \in G$, deci $(I_2 + B)^t (I_2 + B) = I_2 \Longrightarrow B + B^t = -I_2, B^t \cdot B = I_2$ **2 puncte**

Găsim $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ sau $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ .... **3 puncte**

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}); A \in H \Longrightarrow a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0, a = \pm 1, c = 0$ și $b = 0, d = \pm 1$ sau $a = 0, c = \pm 1$ și $b = \pm 1, d = 0,$ .... **2 puncte**

Găsim soluțiile: $I_2, -I_2, A, -A, B, -B, C, -C, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, deci H are 8 elemente .... **2 puncte**

$(H,\cdot)$ este grup al lui $(G,\cdot)$ .... **3 puncte**

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Considerăm funcția $f: [0, 1] \to \left[\frac{e}{2}, e^2\right], f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$.

a) Dacă $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă, arătați că:

$$\int_0^1 \left(1 + xg'(x)\right) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(1)}.$$

b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Arătați că funcția f este inversabilă și calculați $\int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x) dx$.

SOLUȚIE:

a) $\int_0^1 \left(1 + xg'(x)\right) \cdot e^{g(x)} dx = \int_0^1 \left(xe^{g(x)}\right)' \cdot dx = xe^{g(x)}\Big|_0^1 = e^{g(1)}$ .... **6 puncte**

b) Aleg $g(x) = \frac{2}{x+1}$, atunci $1 + xg'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ și $f(x) = \left(1 + xg'(x)\right) \cdot e^{g(x)}$, deci $\int_0^1 f(x)dx = e^{g(1)} = e$ **6 puncte**

c) $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$, f strict monotonă $\Longrightarrow f$ injectivă, f continuă, $Im\, f = \left[\frac{e}{2}, e^2\right] \Longrightarrow f$ surjectivă $\Longrightarrow f$ bijectivă$\Longrightarrow f$ inversabilă .... **2 puncte**

$I = \int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x)dx, f^{-1}(x) = t \Longrightarrow x = f(t), f^{-1}\left(\frac{e}{2}\right) = 1, f^{-1}(e^2) = 0 \Longrightarrow$

$I = \int_1^0 tf'(t)dt = tf(t)|_1^0 - \int_1^0 f(t)dt = -\frac{e}{2} + e = \frac{e}{2}$ .... **6 puncte**

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Considerăm grupul $(\boldsymbol{G},*)$ unde $G = (2, \infty)$ și $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in G$.

a) Dacă $a, b, c \in G$ și $a * b = c, b * c = a, c * a = b$, arătați că $a = b = c$.
b) Determinați șirul $(a_n)_{n\geq 1} \subset G$, știind că $a_1 * a_2 * \ldots * a_n = n + 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Fie H un subgrup al grupului G care conține toate numerele naturale $k \geq 3$. Demonstrați că H conține toate numerele raționale $q > 2$.

SOLUȚIE:

a) Avem $x * y = (x-2)(y-2) + 2, \ \forall x, y \in G$ .... **3 puncte**

$(a-2)(b-2) = c - 2;\ (b-2)(c-2) = a - 2;\ (c-2)(a-2) = b - 2$ .... **3 puncte**

$a, b, c > 2$ și $(a-2)^2(b-2)^2(c-2)^2 = (a-2)(b-2)(c-2) \Longrightarrow (a-2)(b-2)(c-2) = 1 \Longrightarrow$

$(a-2)^2 = (b-2)^2 = (c-2)^2 = 1$, deoarece $a, b, c \in G \Longrightarrow\ a = b = c = 3$ .... **3 puncte**

b) $n = 1 \Longrightarrow a_1 = 4$ .... **1 punct**

$n \geq 2, a_1 * a_2 * \ldots * a_n = n + 3 \Longrightarrow (n+2) * a_n = n + 3 \Longrightarrow n(a_n - 2) = n + 1$, deci $a_n = \frac{n+1}{n} + 2$,

$a_n = 3 + \frac{1}{n}, n \geq 2$. Cum $3 + \frac{1}{1} = 4 \Longrightarrow a_n = 3 + \frac{1}{n}, n \geq 1$ .... **3 puncte**

c) $(H,*)$ subgrup $\Longrightarrow e = 3 \in H$ ($e = 3$, element neutru în G) și $\forall x \in H, x' = 2 + \frac{1}{x-2} \in H$ (x' este simetricul lui $x > 2$ din G) .... **4 puncte**

Fie $q \in \mathbb{Q}, q > 2$ deci $q - 2 > 0, q - 2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow q - 2 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}^*$ .... **1 punct**

Rezultă $a + 2, b + 2 \in \mathbb{N}, a + 2 \geq 3, b + 2 \geq 3 \Longrightarrow a + 2, b + 2 \in H$ .... **1 punct**

$$(a+2) * (b+2)' \in H \Longrightarrow (a + 2 - 2)\left(2 + \frac{1}{b+2-2} - 2\right) + 2 \in H \Longrightarrow \frac{a}{b} + 2 \in H,$$

deci $q \in H \Longrightarrow$ concluzia .... **1 punct**

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Un leu aleargă după pradă plecând dintr-un punct O cu accelerația

$a(t) = \left(\frac{4t^2+2}{e^{15}} + \frac{2t}{e^4}\right)e^{t^2} + 3t^2 - 12t + 9$, măsurată în m/s^2, timpul $t \geq 0$, măsurat în secunde.

La momentul $t = 0$ viteza sa este $v(0) = \left(1 + \frac{1}{e^4}\right)\ m/s$.

a) Arătați că $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1, t \geq 0$.
b) Stabiliți dacă există momente de timp în care leul este în repaus.
c) Demonstrați că distanța parcursă de leu de la momentul $t = 1$ la $t = 4$ este mai mare decât $11\ m$.

Notă: Dacă $S(t)$ este spațiul parcurs de leu în t secunde, iar S este o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă, atunci viteza leului este $v(t) = S'(t)$, iar accelerația este $a(t) = S''(t)$.

SOLUȚIE:

a) $a(t) = v'(t)$ deci v este primitivă a funcției a .... **2 puncte**

$v(t) = \int a(t)\, dt, t \geq 0$ .... **3 puncte**

Astfel $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + C$ .... **3 puncte**

$v(0) = 1 + \frac{1}{e^4} \Rightarrow \frac{1}{e^4} + C = 1 + \frac{1}{e^4} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ .... **2 puncte**

b) Leul este în repaus dacă $v(t) = 0, t \geq 0$ .... **3 puncte**

$v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t(t-3)^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$ .... **4 puncte**

Leul nu este în repaus în nici un moment .... **1 punct**

c) $v(t) = S'(t) \Rightarrow \int_0^t v(x)dx = \int_0^t S'(x)dx \Rightarrow S(t) = S(0) + \int_0^t v(x)dx$

Cum $S(0) = 0 \Rightarrow S(t) = \int_0^t v(x)dx$ .... **2 puncte**

$S(t) = \frac{1}{e^{15}}\left(e^{t^2} - 1\right) + \frac{t^4}{4} - 2t^3 + \frac{9t^2}{2} + t + \frac{1}{e^4}\int_0^t e^{x^2}dx$ .... **3 puncte**

Distanța parcursă între $t = 1$ și $t = 4$ este $S(4) - S(1)$ .... **2 puncte**

$S(4) - S(1) = \frac{1}{e^{15}}(e^{16} - e) + \frac{33}{4} + \frac{1}{e^4}\int_1^4 e^{x^2}dx$ .... **2 puncte**

Cum pentru $x \in [1,4], e^{x^2} \geq e^x \Rightarrow \int_1^4 e^{x^2}dx \geq \int_1^4 e^x dx \Rightarrow \int_1^4 e^{x^2}dx \geq e^4 - e$ .... **2 puncte**

$$S(4) - S(1) \geq e + \frac{33}{4} + 1 - \frac{e}{e^4} - \frac{e}{e^{15}} = e + \frac{37}{4} - \frac{e}{e^4} - \frac{e}{e^{15}}$$

$$\frac{e}{e^4} + \frac{e}{e^{15}} = \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^{14}} < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{14}} < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow e - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^{14}} + \frac{37}{4} > e - \frac{1}{4} + \frac{37}{4} > 2 - \frac{1}{4} + \frac{37}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

$\Rightarrow S(4) - S(1) > 11$ .... **1 punct**

Observație: Orice altă soluție corect demonstrată va fi punctată corespunzător.

<u>Notă</u>:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.