CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026
Clasa a XII–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că legea „$*$” este asociativă și comutativă;
b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „ $*$ ”;
c) Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale astfel încât $m * n * p = 13$ și $m \le n \le p$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 13.

SOLUȚIE:

a) Avem $(x * y) * z = (xy - 2x - 2y + 6) * z = (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 =$
$= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$ 2p
și $x * (y * z) = x * (yz - 2y - 2z + 6) = x(yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 =$
$= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$ 2p

Adunarea și înmulțirea în $\mathbb{Z}$ sunt comutative, astfel avem $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, adică legea " $*$ " este asociativă 1p

Adunarea și înmulțirea în $\mathbb{Z}$ sunt comutative, astfel avem: $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ și $y * x = yx - 2y - 2x + 6$, deci $x * y = y * x,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

Adică legea este și comutativă 1p

b) Legea " $*$ " admite element neutru dacă există $e \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$

Avem $x * e = e * x = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow (x - 2)(e - 3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow e = 3 \in \mathbb{Z}$ este elementul neutru al legii " $*$ " 2p

Fie $x \in \mathbb{Z}$, acesta este simetrizabil dacă există $x' \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * x' = x' * x = e = 3$

Avem $x * x' = x' * x = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)(x' - 2) = 1 \Longrightarrow x - 2 | 1$ și $x' - 2 | 1$ 1p

adică $x - 2 = 1, x' - 2 = 1 \Rightarrow x = x' = 3$ sau $x - 2 = -1, x' - 2 = -1 \Rightarrow x = x' = 1$ 2p

Elementele simetrizabile sunt: $\{1,\ 3\}$ 1p

c) $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

Legea „$*$” fiind asociativă, prin calcul deducem $m * n * p = (m - 2)(n - 2)(p - 2) + 2$ 2p

$m * n * p = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2)(p - 2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2)(p - 2) = 11$....................1p

Deoarece 11 este număr prim, $m, n, p \in \mathbb{N}$, iar $m - 2 \le n - 2 \le p - 2 \Longrightarrow$

$m - 2 = -11, n - 2 = -1, p - 2 = 1$, obținem $m = -9, n = 1, p = 3$ (nu convine), sau

$m, n, p \in \mathbb{N} \Longrightarrow m - 2 = n - 2 = -1, p - 2 = 11 \Rightarrow m = n = 1, p = 13$, sau

$m - 2 = n - 2 = 1,\ p - 2 = 11 \Rightarrow m = n = 3, p = 13$....................2p

Întrucât $p = 13$, vom avea $mnp = M_{13}$....................1p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3 x$.

a) Pentru funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{3^{f(x)}}{x}-x$, determinați primitiva $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, care verifică condiția $G(2)=2026$;

b) Arătați că $I=\int_1^e xf(x)\,dx=\frac{e^2+1}{4\ln 3}$;

c) Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, definim $I_n=\int_1^e x\,f^n(x)\,dx$.

Demonstrați că $I_n=\frac{e^2}{2(ln\ \ )^n}-\frac{n}{2\ln 3}I_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

SOLUȚIE:

a) $3^{f(x)}=3^{log_3 x}=x$ 1p

$g(x)=\frac{x}{x}-\boldsymbol{x}=1-x$ 1p

$G(x)=\int(1-x)dx=x-\frac{x^2}{2}+C$ 2p

$G(2)=2-2+C=C=2026 \Longrightarrow G(x)=x-\frac{x^2}{2}+2026$ 2p

b) $I=\int_1^e x\,log_3 x\,dx=\frac{1}{ln\,3}\int_1^e xlnx\,dx$ 1p

$\int_1^e xlnx\,dx=\frac{x^2}{2}lnx\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\frac{x^2}{2}lnx\Big|_1^e-\ \frac{x^2}{4}\Big|_1^e$ 3p

$I=\frac{1}{ln\,3}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4\,ln\,3}$ 2p

c) $I_n=\int_1^e x(log_3 x)^n\ dx=\frac{1}{(ln\ \ )^n}\int_1^e x\,(lnx)^n dx$ 1p

$\int_1^e x\,(lnx)^n\,dx\ =\frac{x^2}{2}(lnx)^n\Big|_1^e-\frac{n}{2}\int_1^e x(lnx)^{n-1}\,dx$ 4p

$=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_1^e x(lnx)^{n-1}\,dx$ 2p

$I_n=\frac{e^2}{2(ln3)^n}-\frac{n}{2\,ln}I_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}$ 1p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Fie, de asemenea, mulțimea $\boldsymbol{G} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | det(X) = 1\}$.

a) Verificați dacă A și B aparțin mulțimii $\boldsymbol{G}$.
b) Demonstrați că mulțimea $\boldsymbol{G}$, împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează un grup.
c) Demonstrați că, dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{G}$ este soluţie a ecuaţiei $X^2 - X + I_2 = O_2$, atunci $a + d = 1$.

SOLUȚIE:

a) $det(A) = \begin{vmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{vmatrix} = 2026 \cdot 1 - 1 \cdot 2025 = 2026 - 2025 = 1 \Rightarrow A \in \boldsymbol{G}$...2p

$det(B) = \begin{vmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2026 \cdot 1 - 2025 \cdot (-1) = -2026 + 2025 = -1 \Rightarrow B \notin \boldsymbol{G}$ 2p

b) $(\forall) X, Y \in \boldsymbol{G} \Rightarrow det(X) = det(Y) = 1$ 1p

Folosind că: $det(X \cdot Y) = det(X) \cdot det(Y)$ pentru $(\forall) X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deducem $det(X \cdot Y) = 1$...................1p

Deci $X \cdot Y \in \boldsymbol{G}$, $(\forall) X, Y \in \boldsymbol{G}$ (1)..1p

Avem că $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z), (\forall) X, Y$ şi $Z \in \boldsymbol{G}$ (2)...1p

De asemenea, $det(I_2) = 1$, deci $(\exists) I_2 \in \boldsymbol{G}$ a.î. $I_2 \cdot X = X \cdot I_2 = X, (\forall) X \in \boldsymbol{G}$ (3)......................................2p

Pentru $(\forall) X \in \boldsymbol{G}$, din $det(X) = 1 \Rightarrow$ $(\exists) X^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$,

de unde deducem că $det(X^{-1}) = \frac{1}{det(X)} = 1$, deci $(\forall) X \in \boldsymbol{G}, (\exists) X^{-1} \in \boldsymbol{G}$ a.î. $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$ (4) 2p

Din relaţiile (1), (2),(3) şi (4) deducem că mulţimea $\boldsymbol{G}$ împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează un grup.... ....2p

c) Utilizând relaţia lui Cayley-Hamilton: $X^2 - (a + d)X + detX \cdot I_2 = O_2$ 2p

obţinem pentru $X \in \boldsymbol{G}$ că $X^2 - (a + d)X + I_2 = O_2$ 1p

Din ipoteză avem că $X^2 - X + I_2 = O_2$ deci $(a + d)X = X \Leftrightarrow (a + d - 1)X = O_2$ 1p

Deoarece $det(X) = 1$ şi deci $X \neq O_2$, deducem că $a + d - 1 = 0 \Leftrightarrow a + d = 1$ 2p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Cu ocazia unui experiment, s-a observat că intensitatea radiației produsă de o sursă, măsurată într-un punct situat la distanța $a > 0$ față de acea sursă, este dată de formula: $\boldsymbol{I(a)} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}dx$.

a) Calculați valoarea intensității radiației măsurată în punctele situate la distanțele $a = 1$ şi $a = \sqrt{3}$ față de sursă;

b) Demonstrați că funcția $\boldsymbol{I}: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, cu $\boldsymbol{I(a)} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}dx$ este descrescătoare; interpretați din punct de vedere fizic rezultatul obținut;

c) Demonstrați că are loc relația : $\boldsymbol{I(a)} > \frac{1}{a^2+1}$, pentru orice $a > 0$.

SOLUȚIE:

a) $I(1) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx\big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ ……………………………………..….....….5p

$I(\sqrt{3}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ ………….…………..5p

b) Pentru $(\forall)a, b$ cu $0 < a < b$ şi $(\forall)x \in (0; 1)$ avem că $x^2 + a^2 < x^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+a^2} > \frac{1}{x^2+b^2}$ ………..….2p

de unde, conform proprietăţii de monotonie a integralei definite, găsim că

$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}dx > \int_0^1 \frac{1}{x^2+b^2}dx \Rightarrow I(a) > I(b)$, adică funcţia $\boldsymbol{I}$ este descrescătoare ……………………………...5p

Din punctul de vedere fizic, această inegalitate explică faptul că, pe măsură ce ne îndepărtăm de sursă, intesitatea radiaţiei scade …………………………………………………………………….......…3p

c) $(\forall)$ $x \in (0; 1)$ şi $(\forall)a$ cu $a > 0$ avem $a^2 + x^2 < a^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+a^2} > \frac{1}{a^2+1}$ ……………………….….......…..5p

de unde, integrând de la 0 la 1, găsim: $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}dx > \int_0^1 \frac{1}{a^2+1}dx \Rightarrow I(a) > \frac{1}{a^2+1} \cdot x\Big|_0^1 = \frac{1}{a^2+1}$ ……..…5p

Notă:

*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.