CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Se consideră matricele $A.B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB - BA = A$.

a) Arătați că $tr(A) = 0$.

b) Demonstrați că $ABA = O_2$.

SOLUȚIE:

a) $tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA)$ 5p

AB și BA au aceeași urmă $\Rightarrow tr(A) = 0$ 5p

b) $ABA - BA^2 = A^2$ și $A^2B - ABA = A^2$ 4p

Cayley-Hamilton: $A^2 - tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2, \forall A \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow A^2 = -\det(A) \cdot I_2$ 2p

$BA^2 = A^2B = -\det(A) \cdot B \Rightarrow A \cdot B \cdot A = -\det(A) \cdot B - \det(A) \cdot I_2 = -\det(A) \cdot B + \det(A) \cdot I_2 \Rightarrow \det(A) = 0$ 2p

$A^2 = O_2$, deci $ABA = O_2$ 2p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Fie punctele $A(-1,6), B(1,-3), C(9,0)$ și $D(4,10)$.

a) Calculați aria patrulaterului $ABCD$.

b) Determinați mulțimea punctelor P din planul patrulaterului $ABCD$, astfel încât ariile triunghiurilor PAB și PCD să fie egale.

SOLUȚIE:

a) $A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ADC} = A_{ABCD}$ 2p

$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 78 \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |78| = 39$ u.a. 3p

$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -70 \Rightarrow A_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot |-70| = 35$ u.a. 3p

$A_{ABCD} = 39 + 35 = 74$ u.a. 2p

b) Notăm cu *P(a,b)* coordonatele punctelor care satisfac condiția ca cele două arii să fie egale.

$A_{\Delta PAB} = \frac{1}{2}|9a + 2b - 3|$ 3p

$A_{\Delta PCD} = \frac{1}{2}|10a + 5b - 90|$ 3p

$9a + 2b - 3 = \pm(10a + 5b - 90)$ 2p

Mulțimea punctelor care satisfac condiția dată este formată din reuniunea dreptelor $x+3y-87=0$ și $19x+7y-93=0$ 2p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

a) Să se demonstreze inegalitatea: $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x < 0, \forall x \in (0,1)$.

b) Se consideră funcția $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, continuă cu $f(0)f(1) < 0$. Să se arate că există un număr $c \in (0,1)$ astfel încât $-\frac{1}{4} \leq f(c) + f(c^2) < 0$.

SOLUȚIE:

a) $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 \leq 4x^2 - 4x + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq (2x-1)^2 < 1$ 5p

$x \in (0,1) \Leftrightarrow 2x \in (0,2) \Leftrightarrow 2x - 1 \in (-1,1) \Rightarrow 0 \leq (2x-1)^2 < 1$ 5p

b) Se consideră funcția $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(x^2) + x - x^2$ 3p

g funcție continuă cu $g(0)g(1) < 0$ 3p

Există $c \in (0,1)$ cu $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) + f(c^2) = c^2 - c$ 2p

Dar $c^2 - c \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right), \forall c \in (0,1) \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq f(c) + f(c^2) < 0$ 2p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Doi asteroizi Asterisc și Obelisc, situați în același plan, pornesc la momentul $x_0 = 0$, descriind următoarele legi de mișcare: Asterisc are traiectoria descrisă de $f(x) = \dfrac{2ax + a + 2}{2x+1}$, $x \in [0, +\infty)$, iar Obelisc are traiectoria descrisă de $g(x) = \dfrac{4ax^2 + 5x + 3}{bx^2 + 4}$, $x \in [0, +\infty)$, unde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La un moment dat cei doi asteroizi se ciocnesc, dar își urmează traiectoria.

a) Determinați parametrii reali $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, știind că traiectoriile, după ciocnire, sunt asimptotice dreptei $y = 1$.

b) Pentru a și b determinați la punctul a), aflați după cât timp de la pornire, se ciocnesc cei doi asteroizi, unitatea de timp fiind ora.

SOLUȚIE:

a) Condiția este $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ 5p

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2ax + a + 2}{2x+1} = 1 \Rightarrow a = 1$ 5p

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 5x + 3}{bx^2 + 4} = 1 \Rightarrow b = 4$ 5p

b) Se rezolvă ecuația $\dfrac{2x+3}{2x+1} = \dfrac{4x^2 + 5x + 3}{4x^2 + 4} \Leftrightarrow$ 3p

$(2x+3)\cdot\left(4x^2+4\right)=\left(2x+1\right)\cdot\left(4x^2+5x+3\right)\Leftrightarrow 2x^2+3x-9=0$ …………………………………………………………… 4p

Se obțin soluțiile $x_1=-3$ (nu convine) și $x_2=\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………………………… 5p

Cei doi asteroizi se ciocnesc după 1h și 30 de minute de la pornire…………………………………………………… 3p

<u>Notă</u>:
Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.