**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**„ADOLF HAIMOVICI”**
***Ediția a XXVIII-a***
**ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026**
**Clasa a XI–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică**

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

**Subiectul 1.** (*20 puncte*)

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 \\ x & 2x+1 & x+2 \end{pmatrix}$, unde $x$ este un număr real.

Determinantul matricei $A(x)$ se notează cu $D(x)$.

a) Arătați că $D(-1)=8$.

b) Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(-1)\cdot B=A(1)$.

c) Demonstrați că $D(x)=x^3\cdot(x-1)^3$, pentru orice număr real $x$.

**SOLUȚIE:**

$D(-1)=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$ ........................................3p

$=1+3+3+3+1-3=8.$ ........................................3p

a) $detA(-1)=D(-1)=8\neq 0 \Leftrightarrow A(-1)$ este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. ........................................1p

$[A(-1)]^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $[A(-1)]^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ........................................3p

$B=[A(-1)]^{-1}\cdot A(1)=$ ........................................1p

$=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} -8 & -24 & -24 \\ -8 & -24 & -24 \\ -8 & -24 & -24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ ........................................2p

b) $D(x)=\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 \\ x & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix}\overset{L_1\to L_1-L_2}{=}\begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 \\ x & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix}=$ ........................................1p

$\overset{L_2\to L_2-L_3}{=}\begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x(x-1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ x & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix}=$ ........................................1p

$=(x-1)^2\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix}=x(x-1)^2\begin{vmatrix} x & 2x & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix}=$ ........................................2p

$\overset{C_2\to C_2-C_1}{=}x(x-1)^2\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2x & x+2 \end{vmatrix}=x^2(x-1)^2\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x+2 \end{vmatrix}=$ ........................................2p

$\overset{C_3\to C_3-C_2}{=}x^2(x-1)^2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=x^3(x-1)^2\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x^3\cdot(x-1)^3,\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$ ........................................1p

**Subiectul 2.** (*20 puncte*)

a) Determinați valorile parametrului real $m$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice număr real $x$ .

b) Fie matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați $B^n$ , unde $n$ este un număr natural nenul.

**SOLUȚIE:**

a) $A$ este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow det(A) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$. ........................................................1p

$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2(x-1)x + 3m + x - 3(x-1) - 2 - mx^2 =$ ..........................................2p

$= (2-m)x^2 - 4x + (3m+1)$ ..........................................................................................1p

Cazul 1. $m \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$det(A) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2-m)x^2 - 4x + (3m+1) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ . ……………..……....1p

$\Delta = (-4)^2 - 4(2-m)(3m+1) = 16 - 4(-3m^2 + 5m + 2) = 4(3m^2 - 5m + 2)$ …………..……..1p

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(3m^2 - 5m + 2) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$. ………………………………………..………..…..2p

Cazul 2. $m = 2$

$det(A) = -4x + 7$ .

$det(A) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$ . Pentru $m = 2$ și $x = \frac{7}{4}$ matricea $A$ nu este inversabilă. ..................................1p

Finalizare: $m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ . ………………………..…………………………....1p

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$. …………………………………………………………….…2p

Fie enunțul $P(n)$: $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$. …………………………...…………………..…2p

$n = 1 \Rightarrow P(1)$: $B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(1)$ este propoziție adevărată. …………………………......…1p

Presupunem adevărată $P(k)$: $B^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}^*$. ..............................................................1p

Demonstrăm că este adevărată $P(k+1)$: $B^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}$. ………………..…………….……1p

$B^{k+1} = B^k \cdot B = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{k-1} & 0 & 2 \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \cdot 2^{k-1} & 0 & 2 \cdot 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}$… ….2p

Conform metodei inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. ………........1p

**Subiectul 3.** (*20 puncte*)

Se consideră funcția $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2+ax+a}, a \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $a = 0$, să se specifice domeniul maxim de definiție al funcției $f$ și să se calculeze $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

b) Dacă $a = 0$, să se arate că tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției $f$, este perpendiculară pe dreapta $x + 3y - 6 = 0$.

c) Determinați valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției $f$ să admită o singură asimptotă verticală.

**SOLUȚIE:**

a) Dacă $a = 0$, vom avea $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2}$ ....................1p

$x^2 \neq 0 \implies x \neq 0 \implies D = \mathbb{R}^*$ ....................1p

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(-1)$ ....................1p

Calcularea derivatei $f'(x) = \frac{(x^2+5x+4)'x^2-(x^2+5x+4)(x^2)'}{x^4}$ ....................1p

$f'(x) = \frac{-5x-8}{x^3}$, $f'(-1) = 3$ ....................2p

**Sau**: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{\frac{x^2+5x+4}{x^2}-0}{x+1} \overset{1p}{=} \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^2(x+1)} \overset{1p}{=} \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+4)}{x^2(x+1)} \overset{1p}{=} \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+4)}{x^2} = 3$ ....................4p

b) $d: x + 3y - 6 = 0 \implies m_d = -\frac{1}{3}$ ....................2p

$m_{tg} = f'(-1) = 3$ ....................2p

Verificarea condiției de perpendicularitate: $tg \perp d \Leftrightarrow m_d \cdot m_{tg} = -1$ ....................2p

**Observație:**

Scrierea doar a ecuației tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = -1$:

$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \implies y = 3x + 3$ ....................1p

c) Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + ax + a$.

Dacă $\Delta = a^2 - 4a < 0 \implies g(x) \neq 0, \forall \in \mathbb{R} \implies$ $f$ nu are asimptote verticale. ....................1p

Dacă $\Delta = a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 4\}$

$a = 0 \implies g(x) = x^2 \implies f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2} \implies \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2+5x+4}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x^2+5x+4}{x^2} = \frac{4}{0_+} = \infty \implies x = 0$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției $f$ ....................2p

$a = 4 \implies g(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+5x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+5x+4}{(x+2)^2} = \frac{-2}{0_+} = -\infty \implies x = -2$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției $f$. ....................2p

Dacă $\Delta = a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

Considerăm funcția $h(x) = x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow h(x) = (x + 1)(x + 4) \implies h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, -4\}$

Dacă $x = -1$ este o rădăcină comună a lui $h$ și $g \implies h(-1) = g(-1) = 0 \implies (-1)^2 + a \cdot (-1) + a = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ $(fals)$.

Dacă $x = -4$ este o rădăcină comună a lui $h$ și $g \implies h(-4) = g(-4) = 0 \implies (-4)^2 + a \cdot (-4) + a = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 4a + a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{16}{3} \in (4, \infty) \implies g(x) = x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} \Leftrightarrow g(x) = (x + 4)\left(x + \frac{4}{3}\right)$ și

$f(x) = \frac{(x+4)(x+1)}{(X+4)(x+\frac{4}{3})} \implies f(x) = \frac{(x+1)}{\left(x+\frac{4}{3}\right)} \implies x = -\frac{4}{3}$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției $f$ ....................2p

$S = \{0, 4, \frac{16}{3}\}$ ....................1p

**Subiectul 4.** (*30 puncte*)
Toboganul Marele Alb din parcul balnear de la Băile Figa este cel mai înalt din România.
$H(x)$ reprezintă înălțimea la care se află vizitatorul după ce a parcurs distanța $x$ (exprimată în metri) de la punctul de start al toboganului și este definită prin: $H(x) = \begin{cases} ax^2 - \frac{1}{4}x + b, x \in [0,2] \\ \frac{32}{\pi} arctg\,\frac{1}{x-2}, x \in (2,40] \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Toboganul nu prezintă „sărituri”, adică funcția $H$ este continuă pe întreg domeniul de definiție $[0,40]$.

a) Determinați numărul real pozitiv $b$, știind că la momentul startului, vizitatorul se află la înălțimea de $18\ m$ față de nivelul solului.
b) Folosind valoarea lui $b$ obținută anterior, determinați valoarea parametrului real $a$.

**SOLUȚIE:**

a) $H(0) = a \cdot 0^2 - \frac{1}{4}0 + b$ ....................3p
$H(0) = 18$ ....................3p
$\Rightarrow b = 18$....................4p

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} H(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (ax^2 - \frac{1}{4}x + 18) = 4a - \frac{1}{4} \cdot 2 + 18 = 4a + \frac{35}{2}$ ....................5p
$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} H(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \left(\frac{32}{\pi} arctg\,\frac{1}{x-2}\right) = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 16$ ....................5p
$H\ continuă\ pe\ [0,40] \Rightarrow H\ continuă\ în\ 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} H(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} H(x) = H(2)$ ....................5p

$4a + \frac{35}{2} = 16 \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$ ....................5p

***Notă:***
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
***Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem, se notează cu punctaj echivalent.***
***Punctajul maxim este de 100 de puncte.***