CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a X-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Se consideră numerele $a, b, c \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, iar $x, y, z \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât

$$a^x = b \cdot c,\ b^y = a \cdot c \text{ și } c^z = a \cdot b.$$

a) Dacă $a = 2, b = 4$ și $c = 8$, determinați valorile numerelor x, y și z.

b) Demonstrați că suma $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ este un număr natural, oricare ar fi numerele a, b, c, x y și z cu proprietățile din enunț.

SOLUȚIE:

a) Din $2^x = 32, 4^y = 16$ și $8^z = 8$ 3p
obținem $x = 5, y = 2, z = 1$ 3p
b) Avem: $x \cdot \lg a = \lg bc \Rightarrow$ 3p
$\Rightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a} \Rightarrow$ 3p
$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{\lg a}{\lg a + \lg b + \lg c}$ și, analog, $\frac{1}{y+1} = \frac{\lg b}{\lg a + \lg b + \lg c}$, $\frac{1}{z+1} = \frac{\lg c}{\lg a + \lg b + \lg c}$ 5p
Rezultă că $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{\lg a + \lg b + \lg c}{\lg a + \lg b + \lg c} = 1 \in \mathbb{N}$ 3p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, următoarele ecuații:

a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = 0$;
b) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

Gazeta Matematică 12/2025 (Supliment)

SOLUȚIE:

a) Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{ax+2}, a > 0$ este strict crescătoare, deoarece se obține prin compunerea a două funcții strict crescătoare 2p
Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+2}$ este strict crescătoare, pentru că se obține prin sumarea unor funcții strict crescătoare 3p

Rezultă că ecuația $f(x)=0$ are cel mult o soluție reală 2p
Cum $f(-1)=0$, înseamnă că $x=-1$ este unica soluție a ecuației 3p
b) Ridicând la puterea a treia ambii membri ai ecuației, obținem că
$(x+5)+(x+6)+3\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=2x+11$ 2p
Înlocuind paranteza cu $\sqrt[3]{2x+11}$, deducem că $\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{x+6}\cdot\sqrt[3]{2x+11}=0$ 3p
Rezultă că $x\in\left\{-6,-\frac{11}{2},-5\right\}$, ... 3p
care verifică (alternativ, se poate invoca injectivitatea funcției putere de gradul al treilea) 2p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

a) Fie z_1 și z_2 două numere complexe astfel încât $|z_1|=|z_2|=1\neq z_1\cdot z_2$.

Arătați că $w=\frac{z_1-z_2}{1-z_1\cdot z_2}$ este număr real.

b) Demonstrați că orice număr real a se poate scrie sub forma $a=\frac{z_1-z_2}{1-z_1\cdot z_2}$, unde z_1 și z_2 sunt două numere complexe astfel încât $|z_1|=|z_2|=1\neq z_1\cdot z_2$.

SOLUȚIE:

a) Cum $|z_1|=|z_2|=1$, rezultă că $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$ și $\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$ 2p
Numărul complex w este real dacă și numai dacă $\overline{w}=w$ 2p
Avem: $\overline{w}=\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{1-\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}{1-\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}=\frac{z_2-z_1}{z_1\cdot z_2-1}=w$, deci w este un număr real 4p
b) Fie a un număr real oarecare. Considerăm, de exemplu, $z_1=i$, număr care are modulul 1, și căutăm $z_2\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_2|=1,\ i\cdot z_2\neq 1$ și $\frac{i-z_2}{1-i\cdot z_2}=a$ 4p
Obținem că $z_2=\frac{a-i}{ai-1}$ 2p
Avem: $|z_2|=\frac{|a-i|}{|ai-1|}=\frac{\sqrt{a^2+(-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2+a^2}}=1$, ... 4p
iar $i\cdot z_2=\frac{(a-i)i}{ai-1}=\frac{ai+1}{ai-1}\neq 1,\ \forall a\in\mathbb{R}$ 2p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

a) Fie α un număr real pozitiv dat și x, y, z trei numere reale pozitive astfel încât $x+y+z=\alpha$. Care este cea mai mare valoare posibilă a produsului $x\cdot y\cdot z$ și când se atinge acest maxim?

b) Dintre toate triunghiurile care au perimetrul de 48 cm, determinați-l pe cel cu aria maximă și precizați care este această arie maximă.

SOLUȚIE:

a) Din inegalitatea mediilor avem că $\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}\le\dfrac{x+y+z}{3}$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=y=z$ 5p

Cea mai mare valoare posibilă a produsului $x\cdot y\cdot z$ este $\dfrac{\alpha^3}{27}$, care se atinge când $x=y=z=\dfrac{\alpha}{3}$ 5p

b) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi având semiperimetrul $p=24$ cm. Aria triunghiului, dată de formula lui Heron, este $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 5p

Observăm că numerele $x=p-a$, $y=p-b$ și $z=p-c$ au suma $x+y+z=3p-(a+b+c)=3p-2p=p$, deci $x+y+z=24$ (cm), indiferent de lungimile laturilor unui triunghi având perimetrul de 48 cm ....
5p

Conform punctului a), produsul $(p-a)(p-b)(p-c)$ este maxim atunci când $p-a=p-b=p-c$, așadar în cazul în care triunghiul este echilateral 5p

Aria maximă a unui triunghi cu perimetrul de 48 cm este aria triunghiului echilateral cu latura $48:3=16$ cm, adică este egală cu $64\sqrt{3}$ cm^2 .... 5p

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă ***10 puncte din oficiu****.*

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.