CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ–07 MARTIE 2026
Clasa a X–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

a) Determinați numerele complexe z pentru care $3|z|-2\bar{z}=3-2i$.

b) Dacă z_1 și z_2 sunt soluțiile ecuației $z^2-z+1=0$, calculați $S_1=z_1^{100}+z_2^{100}$ și $S_2=(z_1-1)^{200}+(z_2-1)^{200}$.

SOLUȚIE:

a) Fie $z\in C, z=a+bi; a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{z}=a-bi$ și $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 1p

Egalitatea devine $(3\sqrt{a^2+b^2}-2a)+2bi=3-2i\Rightarrow b=-1$ și $3\sqrt{a^2+1}=3+2a$ 2p

Obținem $a_1=0,\ a_2=\frac{12}{5}\Rightarrow z_1=-i\,, z_2=\frac{12}{5}-i$ 2p

b) $z^2-z+1=0\Rightarrow(z+1)(z^2-z+1)=0\Rightarrow z^3+1=0\Rightarrow z^3=-1$ 2p

Relațiile lui Viete: $\begin{cases} z_1+z_2=1 \\ z_1\cdot z_2=1\end{cases}$ 2p

Deci $S_1={z_1}^{99}\cdot z_1+{z_2}^{99}\cdot z_2=-(z_1+z_2)=-1$ 3p

Metoda I

Se observă că ${z_1}^2=z_1-1\Rightarrow(z_1-1)^{200}={z_1}^{400}=({z_1}^3)^{133}\cdot z_1=-z_1$ ..,........ 4p

Analog ${z_2}^2=z_2-1\Rightarrow(z_2-1)^{200}={z_2}^{400}=({z_2}^3)^{133}\cdot z_2=-z_2$ 2p

Finalizare $S_2=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)=-1$ 2p

Metoda II

Se observă că $(z_1-1)^3={z_1}^3-3({z_1}^2-z_1+1)+2=1$ 3p

Analog $(z_2-1)^3={z_2}^3-3({z_2}^2-z_2+1)+2=1$ 1p

Deci $S_2=[(z_1-1)^3]^{66}\cdot(z_1-1)^2+[(z_2-1)^3]^{66}\cdot(z_2-1)^2=({z_1}^2+{z_2}^2)-2(z_1+z_2)+2$ 2p

Finalizare $S_2=(z_1+z_2)^2-2z_1\cdot z_2=-1$ 2p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^x} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^x} \le 6$.

b) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x + 9^y = 25 \end{cases}$

SOLUȚIE:

a) Se observă că $3-2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și notăm $\sqrt{(3+2\sqrt{2})^x} = t$, unde $t > 0$ 2p

Se obține $\dfrac{1}{t} + t \le 6 \Rightarrow t^2 - 6t + 1 \le 0 \Rightarrow t \in [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$ 4p

Revenind la notația făcută obținem $3-2\sqrt{2} \le (3+2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} \le 3+2\sqrt{2}$ 2p

Deci $(3+2\sqrt{2})^{-1} \le (3+2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} \le 3+2\sqrt{2}$, unde $3+2\sqrt{2} > 1 \Rightarrow x \in [-2,2]$ 2p

b) Notăm $2^x = a$ și $3^y = b$ și sistemul devine $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$ 2p

Deoarece $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a \cdot b = 12 \end{cases}$ 2p

Metoda I

$\begin{cases} b = 7-a \\ a \cdot (7-a) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 7-a \\ a^2 - 7a + 12 = a \end{cases} \Rightarrow (a,b) \in \{(3,4);(4,3)\}$...................................... 2p

Metoda II

Numerele a și b sunt soluțiile ecuației $t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (a,b) \in \{(3,4);(4,3)\}$…………………... 2p

Revenind la notațiile făcute vom obține

$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 \\ y = \log_3 4 \end{cases}$…………………………………………………………………...….... 2p

sau $\begin{cases} 2^x = 4 \\ 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, deci $(x,y) \in \{(\log_2 3, \log_3 4);(2,1)\}$…………………………………….…..... 2p

Subiectul 3. (*20 puncte*) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+1, & dacă\ x\le 0,\\ log_{\frac{1}{2}}(x+1)+1, & dacă\ x>0\end{cases}$

a) Arătați că funcția f este inversabilă.
b) Dacă funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=2^{x+1}-1$, rezolvați ecuația $(fog)\,(x)=x^2-2$.

Soluție:

a) **Metoda I:**

reprezintă grafic funcția f .... 6 p
arată că orice paralelă la axa Ox intersectează graficul într-un singur punct 2p
obține f este bijectivă 1p
dacă f bijectivă, atunci funcția este inversabilă 1p

Metoda II:

Studiază injectivitatea și surjectivitatea pe ramuri
aplică proprietatea: dacă din $f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$ atunci funcția este injectivă 1p
deoarece $x^2+1\ge 1, iar\ log_{\frac{1}{2}}$(x+1)+1 $<1\Longrightarrow$
egalitatea $f(x_1)=f(x_{2)}$ are loc doar în două cazuri 1p
I. pentru $x_{1,}x_2\le 0$: $x_1^2+1=x_2^2+1\Longrightarrow x_1^2=x_2^2\Longrightarrow x_1=x_2$ 1p
II. pentru $x_1,x_2>0$: $log_{\frac{1}{2}}(x_1+1)+1=log_{\frac{1}{2}}(x_2+1)+1\Longrightarrow x_1=x_2$ 1p
Din I și II obține f injectivă 1p
Pentru $x\le 0, f(x)=x^2+1\ge 1,\Longrightarrow y\in[1,\infty)$; pentru $x>0, log_{\frac{1}{2}}(x+1)<0$ (bază subunitară, funcție monoton strict descrescătoare), $log_{\frac{1}{2}}(x+1)+1<1\Longrightarrow y\in(-\infty,1)$ 2p
$Imf=[1,\infty)\cup(-\infty,1)\Longrightarrow Imf=\mathbb{R}\Longrightarrow$ f – surjectivă 1p

f injectivă și surjectivă $\Longrightarrow$ f – bijectivă 1p
dacă f bijectivă, atunci funcția este inversabilă 1p

b) dacă $x\in(0,\infty)\Longrightarrow x>0\Longrightarrow x+1>1$
funcția exponențială cu baza supraunitară este monoton strict crescătoare..................................... 2p
atunci $2^{x+1}>2^1\ \Longrightarrow 2^{x+1}-1>1\Longrightarrow g$ funcție pozitivă 2p
$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-1+1)+1=-log_2 2^{x+1}+1=-x-1+1=-x$ 3p
$-x=x^2-2\ \Longrightarrow\ x^2+x-2=0\Longrightarrow x_1=1\ și\ x_2=-2$ 2p
dar $x>0\Longrightarrow x=1$ este soluția care convine 1p

Subiectul 4. (*30 puncte*) Într-o unitate tehnologică se monitorizează parametrii apei utilizate într-un proces industrial automatizat. Se calculează ph-ul unei probe de apă industrială după formula $\mathrm{pH} = -\lg[\mathrm{H}^+]$, unde $[\mathrm{H}^+]$, este concentrația ionilor de hidrogen (exprimată în mol/L), obținându-se valoarea 5. Pentru aceeași probă se studiază și evoluția numărului de bacterii patogene în funcție de timp $\mathrm{N(t)}$ (t exprimat în ore) și numărul acestora la momentul recoltării probei (N_0), utilizându-se relația $\mathrm{N(t)} = \mathrm{N}_0 \cdot 10^{0,3\mathrm{t}}$.

a) Stabiliți de câte ori trebuie redusă concentrația ionilor de hidrogen pentru ca apa să devină neutră (apa neutră are $\mathrm{pH} = 7$).

b) După cât timp numărul bacteriilor din proba de apă se va dubla? Aproximați rezultatul la cel mai apropiat număr natural.

c) În timpul funcționării unui utilaj din această unitate, intensitatea sunetului I (exprimată în $\mathrm{W/m^2}$) crește. Stabiliți cât poate fi valoarea maximă a acestei intensități, fără a afecta securitatea muncii, știind că pragul de risc este de la o valoare mai mare de 85 dB pentru nivelul intensității sonore, nivel care se calculează după formula

$\mathrm{L} = 10 \cdot \lg\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$ (exprimată în dB), unde $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$.

Soluție:

a) $\mathrm{pH} = -\lg[\mathrm{H}^+] \Longrightarrow 5 = -\lg[\mathrm{H}^+] \Rightarrow$ 2p
$\Rightarrow [\mathrm{H}^+] = 10^{-5}$ mol/L 2p
Apa neutră are $\mathrm{pH} = 7 \Rightarrow 7 = -\lg[\mathrm{H}^+]_n \Rightarrow [\mathrm{H}^+]_n = \frac{10^{-7}\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$ 2p
$\frac{10^{-5}}{10^{-7}} = 10^2 = 100$, deci concentrația trebuie redusă de 100 de ori 2p

b) $\mathrm{N(t)} = \mathrm{N}_0 \cdot 10^{0,3\mathrm{t}} \Longrightarrow 2\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_0 \cdot 10^{0,3\mathrm{t}} \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow 2 = 10^{0,3\mathrm{t}} \Longrightarrow$ 1p
$\Longrightarrow 0,3\mathrm{t} = \lg 2 \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \mathrm{t} = \frac{\lg 2}{0,3} \Longrightarrow$ 1p
$\Longrightarrow \mathrm{t} = \frac{10\lg 2}{3} \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \mathrm{t} = \frac{\lg 2^{10}}{3} = \frac{\lg 1024}{3} \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \mathrm{t} \approx \frac{lg1000}{3} = \frac{3}{3} \Longrightarrow$ t=1oră 2p

c) $\mathrm{L} = 10 \cdot \lg\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0} \Longrightarrow 10 \cdot \lg\frac{\mathrm{I}}{10^{-12}} \leq 85 \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \lg\frac{\mathrm{I}}{10^{-12}} \leq 8,5 \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \frac{\mathrm{I}}{10^{-12}} \leq 10^{8,5} \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \mathrm{I} \leq 10^{-3,5} \Longrightarrow$ 2p
$\Longrightarrow \mathrm{I}_{\max} = 10^{-3,5}\mathrm{W/m^2}$ 2p

Notă:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.