

CONCURSUL NAȚIONAL "PEDAGOGIA MATEMATICII"
ETAPA JUDEȚEANĂ, 08.03.2025
CLASA a 12-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 15 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

SUBIECTUL I (autor Raluca Daniela Stoican)

Fie mulțimea $M = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in [0, \infty) \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$

1. Determinați $x \in [0, \infty)$ pentru care suma elementelor matricei $A(x)$ este egală cu 2025
2. Arătați că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$
3. Arătați că $A(x) \cdot A(y) \in M$, $(\forall) A(x), A(y) \in M$
4. Arătați că matricea $A(x)$ este inversabilă, $(\forall) A(x) \in M$
5. Demonstrați că $\det[A(0) + A(1) + A(2) + \dots + A(2025)]$ este un pătrat perfect.

Soluție:

1. suma elementelor matricei $A(x)$ este egală cu $2+x$2p
 $2+x = 2025 \Rightarrow x = 2023$4p
2. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru $x = 0$2p
Deci $I_2 = A(0)$, $0 \in [0, \infty)$4p
3. $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$4p
 $x \in [0, \infty), y \in [0, \infty) \Rightarrow x+y \in [0, \infty) \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in M$2p
4. $\det(A(x)) = 1 \neq 0, \forall x \in [0, \infty)$3p
Matricea $A(x)$ este inversabilă $(\forall) A(x) \in M$3p
5. $A(0) + A(1) + A(2) + \dots + A(2025) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 2025 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
.....2p
 $= \begin{pmatrix} 2026 & 1+2+3+\dots+2025 \\ 0 & 2026 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2026 & 2025 \cdot 1013 \\ 0 & 2026 \end{pmatrix}$2p

Deci $\det [A(0) + A(1) + A(2) + \dots + A(2025)] = \begin{vmatrix} 2026 & 2025 \cdot 1013 \\ 0 & 2026 \end{vmatrix} = 2026^2$ care este
un pătrat perfect.....2p

SUBIECTUL II

1. La un club sportiv sunt 93 de elevi înscriși. Dintre aceștia, 78 practică fotbal și 34 baschet. Știind că fiecare elev înscris practică cel puțin un sport, fotbal sau baschet, aflați câți elevi practică doar baschet.

2. 13 saci cu cartofi și 18 saci cu ardei gras cântăresc 300 kg. 18 saci cu cartofi și 18 saci cu ardei gras cântăresc 360 kg. Cât cântărește un sac cu cartofi? Dar unul cu ardei gras?

Observație: Problemele de la subiectul II se rezolvă prin metoda aritmetică.

Soluție:

1. $78 + 34 = 112$ elevi care practică sau fotbal sau baschet 1p
 $112 - 93 = 19$ elevi care practică și fotbal și baschet 2p
 $34 - 19 = 15$ elevi practică doar baschet 2p

2.
 13 saci cu cartofi 18 saci cu ardei gras 300 kg
 18 saci cu cartofi 18 saci cu ardei gras 360 kg 1p
 Observăm că numărul sacilor cu cartofi din a doua relație este mai mare decât numărul sacilor cu cartofi din prima relație, iar numărul sacilor cu ardei gras este egal în ambele relații. Aflăm diferența dintre sacii cu cartofi:
 $18 - 13 = 5$ saci cu cartofi (mai mulți în a doua relație) 1p
 Aflăm diferența de kg dintre cele două relații:
 $360 - 300 = 60$ kg (5 saci cu cartofi) 1p
 $60 : 5 = 12$ kg (cântărește un sac cu cartofi)
 Putem afla cât cântărește un sac cu ardei gras din oricare dintre relații:
 $13 \times 12 = 156$ kg (cartofi)
 $300 - 156 = 144$ kg (ardei gras) 1p
 $144 : 18 = 8$ kg (cântărește un sac cu ardei gras) 1p

SUBIECTUL III

Următoarea secvență face parte din Programa școlară pentru disciplina Matematică pentru clasa a III-a (OMEN nr. 5003/2014):

5.1. Utilizarea terminologiei specifice și a unor simboluri matematice în rezolvarea și/sau compunerea de probleme cu raționamente simple

- rezolvarea de exerciții de tipul: „Află produsul/ câțul/ jumătatea/ sfertul/ dublul etc.”
- identificarea unor fracții, utilizând suport concret sau desene (pizza, tort, măr, pâine, cutie de bomboane, tablete de ciocolată etc.)
- aflarea unui termen necunoscut, folosind metoda balanței sau prin efectuarea probei adunării/ scăderii

5.3. Rezolvarea de probleme cu operațiile aritmetice studiate, în concentrul 0 - 10 000

- identificarea și analiza datelor din ipoteza unei probleme
- identificarea cuvintelor/sintagmelor în enunțurile problemelor care sugerează operațiile aritmetice studiate (a dat, a primit, a distribuit în mod egal, de două ori mai mult etc.)
- rezolvarea și compunerea de probleme folosind simboluri, numere sau reprezentări grafice
- asocierea rezolvării unei probleme cu o reprezentare grafică /desen sau cu o expresie numerică dată

<ul style="list-style-type: none"> - utilizarea simbolurilor ($, \geq, =$) pentru compararea unor numere sau a rezultatelor unor operații aritmetice - identificarea rolului parantezelor rotunde asupra rezultatului final al unui exercițiu - utilizarea unor simboluri pentru numere sau cifre necunoscute, în diverse calcule sau pentru rezolvarea unor probleme - transformarea unei probleme rezolvate prin schimbarea datelor numerice sau a întrebării, prin înlocuirea cuvintelor care sugerează operația, prin adăugarea unei întrebări etc. - transformarea problemelor de adunare în probleme de scădere, a problemelor de înmulțire în probleme de împărțire și invers - formularea de probleme pornind de la situații concrete, reprezentări și/sau relații matematice, imagini, desene, scheme, exerciții, grafice, tabele - formularea și rezolvarea unor probleme pornind de la o tematică dată/de la numere date/ expresii care sugerează operații 	<ul style="list-style-type: none"> - organizarea datelor unei investigații în tabel sau într-o reprezentare grafică în scopul compunerii sau rezolvării de probleme - rezolvarea de probleme prin mai multe metode - identificarea unor situații concrete care se pot transpune în limbaj matematic - verificarea rezultatelor obținute în urma rezolvării unei probleme
<p>5.2. Înregistrarea în tabele a unor date observate din cotidian</p> <ul style="list-style-type: none"> - selectarea și gruparea unor simboluri /numere/ figuri/corpur geometrice după mai multe criterii date și înregistrarea datelor într-un tabel - ordonarea unor evenimente/obiecte din cotidian după anumite criterii (după dimensiuni, preferințe) - înregistrarea în tabele a observațiilor din investigații - extragerea și sortarea de numere dintr-un tabel, pe baza unor criterii date - identificarea datelor din grafice cu bare și din tabele - realizarea unor grafice cu bare pe baza unor informații date/culese 	

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare care să cuprindă 1 item obiectiv, 1 item semiobiectiv și 1 item subiectiv de tip rezolvare de probleme.

Notă: Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței specifice evaluate, respectarea formatului itemului, elaborarea răspunsului așteptat (baremul) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

Soluție:

Itemul obiectiv 3p
Corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 3p

Itemul semiobiectiv 4p
Corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 3p

Itemul subiectiv de tip rezolvare de probleme 4p
Corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 3p