MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2024

Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2024. március 10.

VII. OSZTÁLY

1. feladat. Az $ABCD$ négyzetben M az AD felezőpontja, T a BM és CD egyenesek metszéspontja, és $CP \perp BM$, $P \in MB$. Az A pontban az AP egyenesre állított merőleges a BM egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy:.

a) $\widehat{APQ} = \widehat{PCQ} = 45°$.

b) $PQ = QT = PC$.

Gazeta Matematică

2. feladat. Az A és B valós számokat tartalmazó halmazok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a) $0 \in A$;

b) Ha $1 + x \in A$, akkor $\sqrt{1 + x + x^2} \in B$;

c) Ha $\sqrt{x^2 - x + 1} \in B$, akkor $2 + x \in A$.

Igazold, hogy $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ és $\sqrt{31}$ a B halmaz elemei, és $2024 \in A$.

3. feladat. Nevezzünk *különlegesnek* egy $n \geqslant 2$ számot, ha létezik n olyan páratlan természetes szám, amelyek összege egyenlő a szorzatukkal.

a) Igazold, hogy 5 egy különleges szám!

b) Határozd meg, hogy a $\{2, 3, \ldots, 2024\}$ halmaz hány különleges számot tartalmaz!

4. feladat. Az $ABCD$ paralelogramma DC oldalán felvesszük az M pontot, E és N olyan pontok az AC átlón, amelyekre $BE \perp AC$ és $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{EN}{EA}$.

Bizonyítsd be, hogy ha MN és NB merőleges egymásra, akkor az $ABCD$ négyszög egy téglalap!

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.