

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024****CLASA a VI-a**

**Problema 1.** Determinați numerele naturale  $x, y, z$  pentru care are loc relația

$$2^x - 2^y - 2^z = 1023.$$

**Problema 2.** a) Arătați că numerele  $12n + 13$  și  $13n + 14$  sunt prime între ele, pentru orice număr natural  $n$ .

b) Determinați numărul perechilor  $(a, b)$  de numere naturale pentru care există un număr natural  $n$  astfel încât  $\frac{a}{b} = \frac{12n + 13}{13n + 14}$  și  $17a + 19b < 2024$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Spunem că numerele naturale nenule  $m$  și  $n$  au proprietatea  $P$  dacă pentru orice divizor  $d_1$  al lui  $m$  și orice divizor  $d_2$  al lui  $n$ , numărul  $d_1 + d_2$  este prim.

a) Arătați că dacă  $m$  și  $n$  au proprietatea  $P$  și sunt diferite, atunci numărul  $m + n$  este impar.

b) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale, cu  $m \leq n$ , care au proprietatea  $P$ .

**Problema 4.** Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $\angle BAC = 54^\circ$  și  $\angle ACB = 45^\circ$ . Fie punctele  $D$  pe segmentul  $BC$  și  $E$  pe segmentul  $AD$  astfel încât  $AD = AB$  și  $BE = BD$ . Notăm cu  $F$  intersecția dintre  $BE$  și  $AC$ , și fie  $DM$  bisectoarea unghiului  $\angle ADF$ , unde  $M \in AC$ . Perpendiculara dusă din  $C$  pe  $AB$  intersectează  $DM$  în  $G$ .

Arătați că:

a) triunghiul  $ABF$  este isoscel;

b)  $CG = CM$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*