Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

**Országos Matematikaolimpia**
**Megyei forduló - 2024. március 10.**

# V. OSZTÁLY

**1. feladat.** Ki tudunk tölteni egy $7 \times 7$-es táblázatot az első 49 darab nemnulla természtes számmal úgy, hogy minden egységnyi négyzet egy számot tartalmazzon és bármely két prímszám ne legyen egymás szomszédja?

Azt mondjuk, hogy két szám egymás *szomszédja*, ha olyan négyzetekben vannak, amelyeknek van egy közös oldala vagy egy közös csúcsa.

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** Egy táblára felírták az összes természetes számot 1-től 2025-ig. Három barátnő a következőképpen színezi a számokat: Alexa pirosra színezi az 1 és a 2 számokat, ezután Bianka sárgára színezi a 3, 4 és 5 számokat, majd Krisztina kékre színezi a 6, 7, 8 és 9 számokat; ezt a szabályt ismételve folytatják: Alexa pirosra színezi a következő két számot, Bianka sárgára színezi a következő három számot, majd Krisztina kékre színezi a a következő négy számot. Addig folytatják a barátnők a számok színezését, amíg minden táblán lévő számot kiszíneznek.

a) Állapítsd meg, hogy milyen színű lesz a 2024.

b) Határozd meg azt a legkisebb $n$ természetes számot, amelyre igaz, hogy miután kiszíneztek $n$ számot, akkor a sárgára színezett számok összege nagyobb, mint 2024.

**3. feladat.** Igazold, hogy:

a) végtelen sok olyan $n$ természetes szám létezik, amelyre $2 \cdot n$ négyzetszám és $3 \cdot n$ köbszám;

b) nem létezik egyetlen olyan $m$ természetes szám sem, amelyre $2 + m$ négyzetszám és $3 \cdot m$ köbszám!

**4. feladat.** Azt mondjuk,, hogy egy $n \geqslant 5$ természetes szám *különleges,* ha bárhogyan választunk ki 5 különböző számot az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok közül, van köztük 4 különböző $a, b, c, d$ szám, amelyekre $a + b = c + d$.

a) Igazold, hogy $n = 6$ különleges szám!

b) Határozd meg az összes különleges számot!

*Munkaidő 3 óra.*
*Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.*