Ministerul Educației
Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2024
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2024. március 10.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b > 0$. Határozd meg az α valós szám legkisebb lehetséges értékét, ha

$$(a+b)^x \geq a^x + b, \quad \forall x \geq \alpha.$$

2. feladat. Az ABC háromszög köré írt $\mathcal{C}$ kör középpontja O és sugara 1. Minden $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$ pont esetén legyen $s(M) = OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2$, ahol H_1, H_2, H_3 rendre az MAB, MBC és MCA háromszögek magasságpontjai.

a) Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszög egyenlő oldalú, akkor $s(M) = 6$, bármely $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$ esetén!

b) Bizonyítsd be, hogy ha három különböző $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$ pontra $s(M_1) = s(M_2) = s(M_3)$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú.

Gazeta Matematică

3. feladat. Adottak az a, b, c nemnulla komplex számok, amelyeknek a moduluszaik egyenlők egymással, az $A = a + b + c$ és $B = abc$ számok valósak. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén a $C_n = a^n + b^n + c^n$ szám valós szám!

4. feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}^\star$. Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre:

$$f(x + y^{2n}) = f(f(x)) + y^{2n-1} f(y),$$

bármely $x, y \in \mathbb{R}$ és az $f(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van!

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.