Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2024. március 10.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja O.
Ha $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OC}$, bizonyítsd be, hogy $ABCD$ egy paralelogramma!

Gazeta Matematică

2. feladat. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egy sorozat, amelyre $a_1=\dfrac{1}{2}$ és $2n\cdot a_{n+1}=(n+1)a_n$, bármely nemnulla n természetes szám esetén.

a) Határozd meg a sorozat a_n általános tagjának képletét, ahol n egy nemnulla természetes szám.

b) Ha $b_n=a_1+a_2+...+a_n$, igazold, hogy a $\{b_n\}$, $\{b_{n+1}\}$ és $\{b_{n+2}\}$ számok nem lehetnek egy számtani haladvány egymásutáni tagjai semmilyen n természetes szám eseén!

($\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli.)

3. feladat. Az n összetett szám természetes szám osztói

$$1=d_1<d_2<d_3<...<d_k=n, \text{ahol } k\geq 3.$$

Ha minden $d_{i+2}x^2-2d_{i+1}x+d_i=0$, $i\in\{1,2,...,k-2\}$ egyenletnek van valós megoldása, igazold, hogy van olyan p prímszám, amelyre $n=p^{k-1}$.

4. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H és X a BC oldal felezőpontja. A H pontban a HX egyenesre állított merőleges az (AB) és (AC) oldalakat rendre az Y és Z pontokban metszi. Jelölje O az ABC háromszög köré írt kör középpontját és O' a BHC háromszög köré írt kör középpontját.

a) Igazold, hogy $HY=HZ$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{AZ}=2\overrightarrow{OO'}$.

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.