Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2024. március 10.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Adott az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix úgy, hogy $X^{2023} = X^{2022}$. Bizonyítsd be, hogy $X^3 = X^2$.

Gazeta Matematică

2. feladat. Legyen $p \geq 2$ egy természetes szám és $(x_n)_{n\geq 1}$ egy sorozat, amelyre $x_1 = a > 0$ és $x_{n+1} = x_n + \left[\dfrac{p}{x_n}\right]$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határozd meg a határértékét az a valós paraméter függvényében! Jelölés: $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli..

3. feladat. Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ egy olyan mátrix, amelyre $A^T = -A$, ahol A^T az A mátrix transzponáltja.

a) Ha $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és $A^2 = O_n$, igazold, hogy $A = O_n$.

b) Ha n egy páratlan természetes szám és létezik olyan $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrix, amelyre az A mátrix a B adjungáltja, akkor $A^2 = O_n$.

4. feladat. Adottak az f és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, ahol f folytonos. Feltételezzük, hogy bármely $a < b < c$ esetén létezik egy konvergens $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat, amelynek határértéke b és amelyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ határérték úgy, hogy

$$f(a) < \lim_{n\to\infty} g(x_n) < f(c).$$

a) Adj példát ilyen függvényekre, amelyekre g semmilyen pontban sem folytonos!

b) Igazold, hogy ha g monoton, akkor $f = g$.

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.