



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Secțiunea H1 – Filieră tehnologică XI. Osztály

1. Feladat

Adott az $\mathcal{M} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \ln a & 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in (0; +\infty) \right\}$ halmaz.

- a) Igazold, hogy az \mathcal{M} halmaz bármely két mátrixának szorzata, az \mathcal{M} halmaznak egy mátrixa!
b) Határozd meg az (m, n) , $m > n$, nemnulla természetes számpárokat úgy, hogy az \mathcal{M} halmaz $M(m)$ și $M(n)$ mátrixai esetén teljesüljön az alábbi összefüggés:

$$\det(M(m) \cdot M(n)) - \det(M(m)) - \det(M(n)) = 2024.$$

- c) Határozd meg azokat az $M(a) \in \mathcal{M}$, $a \in \mathbb{N}^*$ mátrixokat, amelyekre létezik $n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $M^n(a) = M(4096)$.

2. Feladat

Adott az $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok halmaza.

- a) Igazold, hogy bármely mátrix az M halmazból invertálható és inverze az M halmaznak eleme!
b) Igazold, hogy az $A(a) \cdot X = A(b)$, ahol $X \in M_3(\mathbb{R})$ és $A(a), A(b) \in M$, egyenlet megoldása az M halmaznak eleme!
c) Számítsd ki: $[A(2)]^{2024}$.

3. Feladat

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3, & x \leq -1 \\ ax^2 + ax - 1, & x > -1 \end{cases}$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}^*$.

- a) Igazold, hogy bármely $a \in \mathbb{R}^*$ esetén, az f függvény folytonos!
b) Határozd meg az a nemnulla valós számot úgy, hogy az f függvény deriválható legyen az $x_0 = -1$ pontban!
c) Igazold, hogy bármely $a > \frac{1}{6}$ esetén az f függvénynek egyetlen megoldása van az $I = [0; 2]$ intervallumban!

4. Feladat

A derékszögű koordináta-rendszerben egy út az $y = \sqrt{x+1}$ egyenlet görbéjén helyezkedik el, és összeköti az A, B, C és D városokat, amelyeknek abszcisszái 0, 3, a és b , $0 < a < b$.

A C városon keresztül autópálya épül, amely érinti az utat és párhuzamos az A és B városok által meghatározott egyenessel.

- a) Határozd meg a C város koordinátáit!
b) Határozd meg a D város abszcisszáját tudva azt, hogy az A, B és D városok közötti földrész területe $3(m.e)^2$.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.